

第一章

集合和简易逻辑

▲ 学习目标

1. 了解集合的含义、表示方法.
2. 了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法.
3. 了解符号 \subseteq 、 \subsetneq 、 $=$ 、 \in 、 \notin 的含义，能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.
4. 掌握交集、并集、补集的概念，并学会求解集合的交、并、补三种运算.
5. 了解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念.
6. 灵活运用所学知识，依据定义判断一个命题中的条件是结论成立的什么条件.

第一节 集合



集合解析

一、集合的有关概念

1. 集合与元素

集合：把一些确定的对象看成一个整体就叫作一个集合，简称集. 一般用大写字母 A , B , C 等表示集合.

元素：集合中的各事物叫作这个集合的元素，简称元. 一般用小写字母 a , b , c 等表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 中的元素，则元素 a 属于集合 A ，记为 $a \in A$.

如果 a 不是集合 A 中的元素，则元素 a 不属于集合 A ，记为 $a \notin A$.

2. 集合中元素的三个特性

(1) 确定性：对于一个给定的集合，它的元素必须是确定的. 不能确定的对象不能组成集合. 例：“个子高的同学”“很小的数”都不能构成集合.

(2) 互异性：集合中任意两个元素都是能区分的(互不相同). 例：集合 A 不能写成 $A =$

$\{1, 1, 2\}$, 而应写成 $A = \{1, 2\}$.

(3) 无序性: 在一个集合中不考虑元素的排列顺序. 例: $\{a, b, c\}$ 和 $\{c, b, a\}$ 是同一个集合.

3. 集合的表示方法

(1) 列举法

把集合中的元素一一列举出来并写在大括号内. 例: 小于 5 的正整数的集合 $\{1, 2, 3, 4\}$.

(2) 描述法

把集合中元素的共同特性描述出来写在大括号内. 例: 不等式 $x+5>1$ 的解集可表示为 $\{x|x+5>1\}$ 或 $\{x|x>-4\}$.

(3) 图示法

用封闭曲线的内部表示一个集合. 用这种图形可以形象地表示出集合之间的关系, 这种图形通常叫作维恩图.

4. 集合的分类

(1) 有限集: 含有有限个元素的集合叫作有限集.

(2) 无限集: 含有无限个元素的集合叫作无限集.

(3) 空集: 不含任何元素的集合叫作空集, 记作 \emptyset .

注意区分数 0、空集 \emptyset 、集合 $\{0\}$ 与集合 $\{\emptyset\}$.

5. 常用的几种数集及其记法

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(自然数集), 记作 N ;

全体正整数组成的集合称为正整数集, 记作 N_+ 或 N^* (“+”标在右下角);

全体整数组成的集合称为整数集, 记作 Z ;

全体有理数组成的集合称为有理数集, 记作 Q ;

全体实数组成的集合称为实数集, 记作 R .

总结如下:

表 1-1

非负整数集 (自然数集)	正整数集	整数集	有理数集	实数集
N	N_+ 或 N^*	Z	Q	R

二、集合间的关系

1. 子集: “包含”关系

子集: 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 那么集

合 B 叫作集合 A 的子集, 记作 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$, 读作“ B 包含于 A ”或“ A 包含 B ”.

真子集: 若集合 B 是集合 A 的子集且 A 中至少有一个元素不属于 B , 那么集合 B 叫作集合 A 的真子集, 记作 $A \supsetneq B$ 或 $B \subsetneq A$.

如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \supseteq B$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$. 例: 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$, 集合 $B = \{-1, 1\}$, 由“元素相同则两集合相等”可知 $A = B$.

$A \subseteq B$ 有两种可能: (1) A 是 B 的一部分; (2) A 与 B 是同一集合.

2. 子集的性质

(1) 自反性: $A \subseteq A$;

(2) 传递性: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

3. 空集的性质

空集是任何集合的子集, 空集是任何非空集合的真子集.

注意: 有 n 个元素的集合, 含有 2^n 个子集, $(2^n - 1)$ 个真子集, $(2^n - 2)$ 个非空真子集.

三、集合的运算

集合的运算类型大致有三种, 如表 1-2 所示.

表 1-2

运算类型	交集	并集	补集
定义	由所有既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合, 叫作 A, B 的交集. 记作 $A \cap B$ (读作“ A 交 B ”), 即 $A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合, 叫作 A, B 的并集. 记作 $A \cup B$ (读作“ A 并 B ”), 即 $A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	设 U 是一个集合, A 是 U 的一个子集, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫作 U 中子集 A 的补集(或余集), 记作 $\complement_U A$, 即 $\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
维恩图			
性质	$A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap B = B \cap A$ $A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$	$A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$ $A \cup B = B \cup A$ $A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$	$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$ $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B)$ $A \cup (\complement_U A) = U$ $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$

第二节 简易逻辑

一、命题

命题是可以判断真假的语句，命题分为真命题和假命题.

真命题就是正确的命题，即如果命题的题设成立，那么结论一定成立.

假命题即条件和结果相矛盾的命题.

一个数学命题都包含有条件和结论两部分. 如果把条件和结论分别用 p 和 q 表示，那么命题可以写成“如果 p 成立，那么 q 成立”，或简写为“若 p ，则 q ”.

例 1 (1)如果 $x^2=9$ ，那么 $x=3$ ；

(2)如果 $x^2=y^2$ ，那么 $x=y$ ；

(3)如果同旁内角互补，那么两条直线平行.

它们均为命题，但命题(1)、(2)为假命题，(3)为真命题.

二、充分条件、必要条件、充要条件

1. 充分条件

如果 p 成立，那么 q 成立，即 $p \Rightarrow q$ ，此时条件 p 是结论 q 成立的充分条件.

2. 必要条件

如果 q 成立，那么 p 成立，即 $q \Rightarrow p$ ，此时条件 p 是结论 q 成立的必要条件.

3. 充要条件

如果 p 既是 q 成立的充分条件，又是 q 成立的必要条件，即既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ ，这时我们就说条件 p 是结论 q 成立的充分必要条件，简称充要条件.

例 2 $p: x-2=0$ ； $q: (x-2)(x+1)=0$ ，求 p 与 q 的逻辑关系.

解：因为“ $x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$ ”，所以“ $x-2=0$ ”是“(x-2)(x+1)=0”成立的充分条件，而“(x-2)(x+1)=0”是“ $x-2=0$ ”成立必要条件.



本章同步练习

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{0, 3, 6, 9, 12\}$ ，则 $A \cap B=$ ()

- A. {3, 5} B. {3, 6} C. {3, 7} D. {3, 9}

2. 设集合 $M=\{x|x<2014\}$, $N=\{x|1<x<2\}$ ，则下列关系中正确的是 ()

- A. $M \cup N = \mathbb{R}$ B. $M \cap N = \{x|1 < x < 2\}$
C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

3. 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 1, 2\}$, 则 $A \cup (\complement_U B) =$ ()
- A. \emptyset B. $\{1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
4. 已知 M, N 为集合 I 的非空真子集, 且 M, N 不相等, 若 $N \cap (\complement_I M) = \emptyset$, 则 $M \cup N =$ ()
- A. M B. N C. I D. \emptyset
5. 下列关系式正确的是 ()
- A. $\{a\} = a$ B. $0 \in \emptyset$
 C. $\{0\} = \emptyset$ D. $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$
6. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 4x - 12 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 2\}$, 则 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ()
- A. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | x > -2\}$
 C. $\{x | x < 2\}$ D. $\{x | x \leq x < 6\}$
7. 下列各选项中, 两个集合相等的是 ()
- A. $M = \{\{2, 5\}\}, N = \{(5, 2)\}$ B. $M = \{x | x^2 - 7x + 10 = 0\}, N = \{2, 5\}$
 C. $M = \emptyset, N = \{\emptyset\}$ D. $M = \{2, 5\}, N = \{(5, 2)\}$
8. 设 $S = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, $T = \{x | a < x < a + 8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $-3 < a < -1$ B. $-3 \leq a \leq -1$
 C. $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$ D. $a < -3$ 或 $a > -1$
9. 设 $A = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $B = \{x | |x - 1| > 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 5\}$ B. $\{x | -1 < x < 5\}$
 C. $\{x | -1 < x < 0\}$ D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$
10. 设全集 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $S = \{e, f\}$, 则 $\complement_U S$ 的所有子集的个数是 ()
- A. 7 B. 8 C. 15 D. 16
11. 设命题甲: $x^2 = 3x + 4$, 命题乙: $x = \sqrt{3x + 4}$, 则 ()
- A. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
 B. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 C. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
 D. 甲是乙的充分必要条件
12. 设命题甲: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 命题乙: 四边形 $ABCD$ 是正方形, 则 ()
- A. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
 B. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 C. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件

D. 甲是乙的充分必要条件

13. 设命题甲: $x+1=0$, 命题乙: $x^2-2x-3=0$, 则 ()

A. 甲是乙的充分必要条件

B. 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件

C. 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件

D. 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件

二、填空题

1. 已知全集 $U=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A=\{-1, 1, 2, 4\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$, 则 $B \cap (\complement_U A)$ 等于 _____.

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x+1<0\}$, $B=\{x|x-3<0\}$, 则集合 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.

3. 设集合 $A=\{(x, y)|x+a^2y+6=0\}$, $B=\{(x, y)|(a-2)x+3ay+2a=0\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的值为 _____.

4. 集合 $\{a, b, c\}$ 的非空真子集共有 _____ 个.

5. 若自然数 n 使得进行加法 $n+(n+1)+(n+2)$ 运算均不产生进位现象, 则称 n 为“给力数”, 例如, 32 是“给力数”, 因 $32+33+34$ 不产生进位现象; 23 不是“给力数”, 因 $23+24+25$ 产生进位现象. 设小于 1 000 的所有“给力数”的各个数位上的数字组成集合 A , 则集合 A 中的数字和为 _____.

6. 如果集合 $M=\{y|y=x^2-2x+1, x \in \mathbf{R}\}$, $N=\{x|x \geqslant 0\}$, 那么 M 与 N 的关系是 _____.

7. 用适当的符号($\in, \notin, =, \supseteq, \subseteq$)填空.

(1) $0 \quad \emptyset$ (2) $a \quad \{a, b, c\}$ (3) $\{0, 1\} \quad \{1, 0\}$

(4) $\emptyset \quad \{\emptyset\}$ (5) $\emptyset \quad \{1, 2, 3\}$ (6) $\{0, 1\} \quad \{\{1, 0\}, 2\}$

8. 已知集合 $A=\{2, 3, 4, m\}$, $B=\{1, 3, 6, n\}$, 若 $A \cap B=\{1, 2, 3\}$, 则 $m=$ _____, $n=$ _____.

9. 设集合 $A=\{x|1 < x < 2\}$, $B=\{x|x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 _____.

10. 设集合 $A=\{x|x \geqslant 3\}$, $B=\{x|x \leqslant -1\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

11. 用“充分不必要”“必要不充分”或“充分必要”填空.

(1) 已知 m, n 为实数, 则 $|m| \geqslant |n|$ 是 $m^2 > n^2$ 的 _____ 条件;

(2) “ $a=b$ ”是“ $a^2=b^2$ ”的 _____ 条件;

(3) “ $x^2=4$ ”是“ $x=2$ ”的 _____ 条件;

(4) “ $|a|=|b|$ ”是“ $a=b$ ”的 _____ 条件;

(5) “ $a=0$, 且 $b=0$ ”是“ $a^2+b^2=0$ ”的 _____ 条件;

(6) “ $b^2-4ac \geqslant 0 (a \neq 0)$ ”是“ $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 有实根”的 _____ 条件.

三、解答题

1. 若集合 A 具有以下性质：

① $0 \in A$, $1 \in A$;

② 若 $x, y \in A$, 则 $x - y \in A$, 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} \in A$.

则称集合 A 是“好集”.

(1) 分别判断集合 $B = \{-1, 0, 1\}$, 有理数集 \mathbf{Q} 是否是“好集”, 并说明理由;

(2) 设集合 A 是“好集”, 求证: 若 $x, y \in A$, 则 $x + y \in A$;

(3) 对任意的一个“好集” A , 分别判断下面命题的真假, 并说明理由.

命题 p : 若 $x, y \in A$, 则必有 $xy \in A$;

命题 q : 若 $x, y \in A$, 且 $x \neq 0$, 则必有 $\frac{y}{x} \in A$;

2. 记函数 $f(x) = \lg(x^2 - x - 2)$ 的定义域为集合 M , 函数 $g(x) = \sqrt{3 - |x|}$ 的定义域为集合 N .

(1) 求 $M \cap N$;

(2) 若 $O = \{x \mid x^2 + 4x + 4 - p^2 < 0, p > 0\}$, 且 $O \subseteq (M \cap N)$, 求实数 p 的取值范围.

参考答案

一、选择题

- | | | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|-------|------|
| 1. D | 2. B | 3. D | 4. A | 5. D | 6. B | 7. B |
| 8. A | 9. A | 10. D | 11. A | 12. C | 13. C | |

二、填空题

1. $\{0\}$
2. $\{x \mid -1 \leqslant x < 3\}$
3. 0 或 -1
4. 6
5. 6
6. $M = N$
7. (1) \notin (2) \in (3) $=$ (4) \in (5) \subseteq (6) \in
8. 1 2
9. $a \geqslant 2$
10. \emptyset $\{x \mid x \geqslant 3 \text{ 或 } x \leqslant -1\}$.
11. (1) 充分必要 (2) 充分不必要 (3) 必要不充分 (4) 必要不充分 (5) 充分必要
- (6) 充分必要

三、解答题

1. 解：(1)集合 B 不是“好集”.

理由如下：假设集合 B 是“好集”.

因为 $-1 \in B$, $1 \in B$, 所以 $-1 - 1 = -2 \in B$. 这与 $-2 \notin B$ 矛盾.

有理数集 \mathbf{Q} 是“好集”. 因为 $0 \in \mathbf{Q}$, $1 \in \mathbf{Q}$,

对任意的 $x, y \in \mathbf{Q}$, 有 $x - y \in \mathbf{Q}$, 且 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} \in \mathbf{Q}$.

所以有理数集 \mathbf{Q} 是“好集”.

(2)因为集合 A 是“好集”, 所以 $0 \in A$. 若 $x, y \in A$, 则 $0 - y \in A$, 即 $-y \in A$.

所以 $x - (-y) \in A$, 即 $x + y \in A$.

(3)命题 p, q 均为真命题. 理由如下：

对任意一个“好集” A , 任取 $x, y \in A$,

若 x, y 中有 0 或 1, 显然 $xy \in A$.

下设 x, y 均不为 0, 1. 由定义可知: $x - 1, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x} \in A$,

所以 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \in A$, 即 $\frac{1}{x(x-1)} \in A$, 所以 $x(x-1) \in A$.

由(2)可得: $x(x-1) + x \in A$, 即 $x^2 \in A$. 同理可得 $y^2 \in A$,

若 $x+y=0$ 或 $x+y=1$, 则显然 $(x+y)^2 \in A$,

若 $x+y \neq 0$ 且 $x+y \neq 1$, 则 $(x+y)^2 \in A$,

所以 $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2 \in A$.

所以 $\frac{1}{2xy} \in A$.

由(2)可得: $\frac{1}{xy} = \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2xy} \in A$,

所以 $xy \in A$.

综上可知, $xy \in A$, 即命题 p 为真命题.

若 $x, y \in A$, 且 $x \neq 0$, 则 $\frac{1}{x} \in A$,

所以 $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x} \in A$, 即命题 q 为真命题.

2. 解：(1)依题意得 $M = \{x | x^2 - x - 2 > 0\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$,

$N = \{x | 3 - |x| \geq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$,

故 $M \cap N = \{x | -3 \leq x < -1 \text{ 或 } 2 < x \leq 3\}$.

(2)因为 $p > 0$, 故 $O = \{x | -2 - p < x < -2 + p\}$.

又 $O \subseteq (M \cap N)$, 故 $\begin{cases} -2 - p \geq -3, \\ -2 + p \leq 3, \end{cases}$

解得 $0 < p \leq 1$.